

1. a) (i) Buďte V a W vektorové prostory a L zobrazení z V do W . Co znamená, že L lineární zobrazení? (2b)

(ii) Nechť L je lineární zobrazení V do W a $\vec{0}$ nechť je nulový prvek W .

Ukažte, že množina vektorů $\vec{v} \in V$, pro které platí $L(\vec{v}) = \vec{0}$, je podprostor prostoru V . (3b)

b) Nechť L je lineární zobrazení, $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, pro které platí:

$$L \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad L \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad L \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}. \quad \text{Najděte } L \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ pro lib. vektor } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3. \quad (5b)$$

c) Vysvětlete, jak je definováno inverzní zobrazení k zobrazení L . (1b)

Existuje k zobrazení L inverzní zobrazení? Pokud ano, najděte je. (5b)

2 a) Ukažte, že množina všech řešení diferenciální rovnice $y'' + py' + qy = 0$ ($p, q \in \mathbb{R}$) tvoří vektorový prostor (V_H). (2b)

b) Co nazýváme fundamentálním systémem řešení diferenciální rovnice $y'' + py' + qy = 0$ ($p, q \in \mathbb{R}$)? (1b)

Popište fundamentální systém řešení pro všechny možnosti řešení charakteristická rovnice. (3b)

c) Najděte řešení diferenciální rovnice $y'' + y = 2 \cos x + x^2 + 1$, které splňuje počáteční podmínky $y(0) = 1, y'(0) = 0$. (8b)

3. Je dána funkce

$$f(x, y) = \sqrt{y + \frac{1}{x}}.$$

a) Najděte a načrtněte její definiční obor. Je $D(f)$ množina otevřená nebo uzavřená? Tvrzení odůvodněte. (3b)

b) Vypočítejte $\nabla f(-1, 2)$. (1b)

c) Napište, co znamená, že funkce $f: M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovatelná v bodě $a \in M$ (M je otevřená množina) a co nazýváme totálním diferenciálem funkce f v bodě a . (3b)

d) Ukažte, že funkce f je v bodě $(-1, 2)$ diferencovatelná a určete v tomto bodě totální diferenciál funkce f . (3b)

e) Napište rovnici tečné roviny a normály ke grafu f v $(-1, 2, 1)$. (2b)

f) Nabývá funkce f globálních extrémů ve svém definičním oboru nebo lokálních extrémů uvnitř? (2b)

4. a) Vypočítejte objem tělesa, které je ohraničené rovinou $z = 0$ a válcovými plochami $z = 4 - y^2$ a $y = \frac{x^2}{2}$. (7b)

b) Vypočítejte hmotnost tělesa, ohraničeného rovinou $z = 0$ a plochami $x^2 + y^2 = 1$, $z = x^2 + y^2 + 1$, je-li hustota tělesa $h(x, y, z)$ přímo úměrá vzdálenosti bodu (x, y, z) od osy z . (7b)

c) Formulujte nutnou podmínku a některou z postačujících podmínek existence Reimannova integrálu $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$. (2b)

5. a) Vysvětlete, co znamená, že rovnicí $F(x, y, z) = 0$ je v okolí bodu (x_0, y_0, z_0) definována implicitně funkce $z = z(x, y)$. (1b)
 Formulujte větu o implicitní funkci pro tento případ. (3b)
- b) Dokažte, že rovnicí
$$z^4 - x^3 y z^2 - x z + y^3 = 0$$
 je definována v okolí bodu $(1, 1, 1)$ implicitní funkce $z = z(x, y)$. (2b)
- c) Pomocí lineární aproximace vypočítejte přibližně hodnotu $z(1, 01; 0, 96)$. (6b)
- d) Vypočítejte smíšenou parciální derivaci druhého řádu funkce $z = z(x, y)$ v bodě $(1, 1)$. (4b)

nebo

5. a) Definujte pojmy
- i) potenciální vektorové pole v oblasti $\omega \subset \mathbb{R}^3(R^2)$ a potenciál vektorového pole v oblasti $\omega \subset \mathbb{R}^3(R^2)$; (2b)
 - ii) vektor rotace $\text{rot } \vec{f}$ pro hladké vektorové pole $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$, zadané na oblasti $\omega \subset \mathbb{R}^3$. (2b)
- b) Formulujte nutnou podmínku i postačující podmínky pro potenciálnost vektorového pole v oblasti $\omega \subset \mathbb{R}^2$. (2b)
- c) Je dáno vektorové pole
$$\vec{f}(x, y) = \left(\frac{y}{1+x^2 y^2}, \frac{x}{1+x^2 y^2} \right).$$
- i) Dokažte, že toto pole je potenciální v celé rovině. (2b)
 - ii) Určete potenciál tohoto pole. (4b)
 - iii) Vypočítejte křivkový integrál tohoto pole $\vec{f}$ po kladně orientované kružnici o středu v počátku a poloměru R . (2b)
-